



Identyfikacja korelacji pomiędzy parametrami opisującymi łupki miedzionośny na przykładzie wybranego fragmentu złoża LGOM

Identification of the correlation between parameters describing the Kupferschiefer on the basis of the selected fragment of LGOM deposit

Dr inż. Katarzyna Pactwa*)

Treść: Artykuł stanowi przykład zastosowania metod statystyki przestrzennej do identyfikacji korelacji pomiędzy parametrami charakteryzującymi warstwę litostratygiczną. Badając zależność pomiędzy miąższością łupka miedzionośnego a średnią koncentracją w nim miedzi korzystano z dwóch metod: statystyki I Morana oraz analizy hot spot. Przedstawione w artykule wyniki są owocem prac wykonanych w ramach rozprawy doktorskiej [10].

Abstract: This paper is an example of spatial statistical methods application to identify the correlation between the parameters characterizing the lithostratigraphic layer. During the examination of the relationship between Kupferschiefer thickness and the average copper concentration two methods were applied: Moran's I statistics and hot spot analysis. The hereby presented results have been elaborated within the framework of a doctoral dissertation [10].

Słowa kluczowe:

autokorelacja przestrzenna, złoża rud miedzi

Key words:

spatial autocorrelation, cooper ore deposit

1. Wprowadzenie

Złoża Legnicko-Głogowskiego Okręgu Miedziowego zlokalizowane są w permskich skałach osadowych. Tworzą je nagromadzenia siarczków miedzi występujące w piaskowcach, łupkach oraz węglanach. Najistotniejszą warstwą litologiczną spośród wymienionych jest łupka, ponieważ jego poziom wyznacza położenie złoża (za wyjątkiem sytuacji gdy łupka zanika). Na zróżnicowanie miąższości osadzającego się w cechystynie łupka miedzionośnego wpłynęło ukształtowanie dna morskiego [8]. Obok miąższości, parametrem opisującym tę warstwę jest koncentracja miedzi. Na istnienie słabej ujemnej korelacji liniowej pomiędzy ww. parametrami zwrócili uwagę Kotlarczyk i in. [6]. Ponieważ istnienie słabej korelacji na całym analizowanym obszarze nie przekreśla możliwości silniejszych lokalnych zależności, postawiono hipotezę, że istnieje związek pomiędzy miąższością warstwy łupkowej a zawartością w niej miedzi. Korzystając z materiału badawczego pochodzącego z rejonu LGOM oraz metodyki opierającej się na globalnych i lokalnych statystykach przestrzennych, przedstawiono weryfikację tego stwierdzenia. Interpretację uzyskanych wyników oparto na dostępnej wiedzy z zakresu budowy geologicznej złoża i jego mineralizacji [9].

2. Charakterystyka materiału doświadczalnego

Badano rejon kopalni Polkowice-Sieroszowice. Wyboru analizowanego obszaru dokonano w taki sposób, by można było uchwycić zmienność miąższości warstwy łupkowej. Dane pochodziły z ok. 6000 tys. profili pionowych.

Otrzymane zbiory w formacie txt. zawierały dane o koncentracji miedzi oznaczonej w poszczególnych próbkach wraz z określeniem: przynależności każdej z próbek cząstkowych do warstwy litologicznej, interwału poboru oraz lokalizacji (współrzędne XY). Zostały one udostępnione przez Dział Geologiczny ZG Polkowice-Sieroszowice należący do KGHM Polska Miedź S.A., na drodze porozumienia zawartego pomiędzy Politechniką Wrocławską a Kopalnią Polkowice-Sieroszowice na przełomie 2008/2009 roku. Do obliczeń użyto uśrednionych wartości koncentracji miedzi, a rezultaty zaprezentowano w widoku 2D.

3. Metodyka badań i uzyskane wyniki

Badania rozpoczęto od obliczenia współczynnika korelacji liniowej pomiędzy miąższością warstwy łupkowej a średnią koncentracją w niej miedzi, który wyniósł -0,28. Ze względu na dużą liczebność próby, wynik ten należy uznać za statystycznie istotny. Taką samą wartość współczynnika korelacji dla tych samych parametrów w rejonie Polkowice-Sieroszowice podają Kotlarczyk i in. [6]. Wynik ten wskazuje na istnienie słabej zależności pomiędzy średnią koncentracją Cu w łupku a miąższością warstwy. Jest to informacja odnosząca się do całego badanego obszaru, nie uwzględnia natomiast lokalnych zmienności.

W celu zidentyfikowania obszarów, które charakteryzuje ujemna korelacja parametrów opisujących warstwę łupkową wykorzystano statystykę I Morana oraz metodę hot spot (przestrzenne autokorelacje) i porównano rezultaty uzyskanych obliczeń. Statystyki umożliwiły zlokalizowanie skupisk punktów o wysokiej i niskiej wartości średniej koncentracji miedzi w łupku oraz jego miąższości. Miejsca jednoczesnego

*) Instytut Górnictwa, Politechnika Wroclawska, Wroclaw

występowania wysokiej wartości jednego parametru i niskiej drugiego oceniono jako charakteryzujące się korelacją ujemną.

3.1. Przestrzenne autokorelacje

Autokorelacja przestrzenna pozwala określić stopień skorelowania wartości zmiennej w danej lokalizacji z wartością tej samej zmiennej występującej w innej lokalizacji. Konsekwencją przestrzennych zależności jest grupowanie się podobnych wartości opisywanej zmiennej. W niniejszym artykule opisywanymi zmiennymi jest miąższość łupka i koncentracja w nim miedzi, a ocenę stopnia ich autokorelacji przeprowadzono w celu sprawdzenia, czy istnieje autokorelacja na całym badanym obszarze każdej ze zmiennych (autokorelacja globalna), a w przypadku jej stwierdzenia, czy istnieją lokalne skupienia o wysokich i niskich wartościach parametru (autokorelacja lokalna). Postępowano zgodnie ze schematem przedstawionym na rys 1. Do wyznaczenia autokorelacji globalnej wykorzystano statystykę I Morana jako metodę stosowaną częściej do tego typu obliczeń [15], a w przypadku autokorelacji lokalnych, posłużono się metodami: Morana oraz hot spot. Użycie dwóch metod miało na celu porównanie ich przydatności do opisu danych geologicznych. Wszystkie obliczenia wykonano z wykorzystaniem oprogramowania ArcGIS 9.3.

3.1.1. Statystyka I Morana

Statystyka Morana (nazwa pochodzi od nazwiska australijskiego matematyka) została zaproponowana przez Cliff'a i Ord'a jako metoda oceny autokorelacji przestrzennej [15, 16]. Oblicza się ją ze wzoru:

- w przypadku niestandardyzowanej wierszami macierzy wag W oraz oryginalnych nietransformowanych wartości obserwacji

$$I = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{n}{S_0} \cdot \frac{z^T W z}{z^T z}, \quad (1)$$

gdzie:

- n – jest liczbą jednostek przestrzennych
- w_{ij} – oznacza element 0/1 macierzy wag W

z – jest wektorem kolumnowym o elementach: $z_i = x_i - \bar{x}$
 x_i – oznacza wartość obserwacji w jednostce i
 $S_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}$ – jest sumą wszystkich elementów macierzy wag

- w przypadku gdy macierz wag jest standaryzowana wierszami, to

$$I_w = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^* (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{z^T W^* z}{z^T z} \quad (2)$$

Przy pomiarze autokorelacji przestrzennej (podobieństwa cechy) brana jest pod uwagę jednocześnie lokalizacja obiektów i wartość cechy im przypisanej. Dla autokorelacji przestrzennej weryfikowanej przez statystykę Morana hipoteza zerowa brzmi: „obserwowane wartości zmiennej X są rozmieszczone w sposób losowy między poszczególnymi lokalizacjami, czyli brak jest autokorelacji przestrzennej” [15]. W przypadku odrzucenia tej hipotezy, należy przypuszczać, że na badanym obszarze istnieje skupienia lub rozproszenia badanej cechy, co ma znaczenie w dalszym wnioskowaniu statystycznym i ocenie korelacji badanych parametrów.

Wartość współczynnika I Morana bliska 1 oznacza skupienie (autokorelacja dodatnia, wartości cechy/trybutu grupują się w klastry/skupienia), a gdy jego wartość jest bliska -1 wskazuje na rozproszenie (autokorelacja ujemna, wartości atrybutów obiektów przemieszane przestrzennie, układy mozaikowe). Wartość współczynnika bliska zeru oznacza brak autokorelacji, charakter losowy zjawiska, sąsiadujące wartości występują niezależnie od siebie. Tak przyjmuje się w praktyce. Teoretycznie w przypadku:

- autokorelacji dodatniej $I > -\frac{1}{n-1}, Z_I > 0,$
- autokorelacji ujemnej $I < -\frac{1}{n-1}, Z_I < 0,$
- braku autokorelacji $I \approx -\frac{1}{n-1}, Z_I \approx 0.$

W tab. 1 znajdują się wartości współczynnika I Morana uzyskane dla dwóch parametrów przy zmieniającej się odległości (d).



Rys. 1. Schemat blokowy operacji w celu oceny wzajemnej korelacji parametrów łupka
 Fig. 1. Block diagram of the operation for the evaluation of cross-correlation of Kupferschiefer parameters

Tablica 1. Globalne statystyki I Morana
Table 1. Global I Moran statistics

Lp.	Odległość, m	Współczynnik I Morana dla miąższości	Współczynnik I Morana dla średniej koncentracji Cu
1	30	0,75	0,39
2	40	0,72	0,37
3	50	0,69	0,34
4	60	0,66	0,31
5	70	0,64	0,29
6	80	0,62	0,27

Wartości współczynnika I Morana we wszystkich przypadkach są większe od zera, oznacza to że globalna statystyka wskazuje na występowanie autokorelacji dla obu parametrów charakteryzujących warstwę łupka: miąższości i średniej koncentracji miedzi.

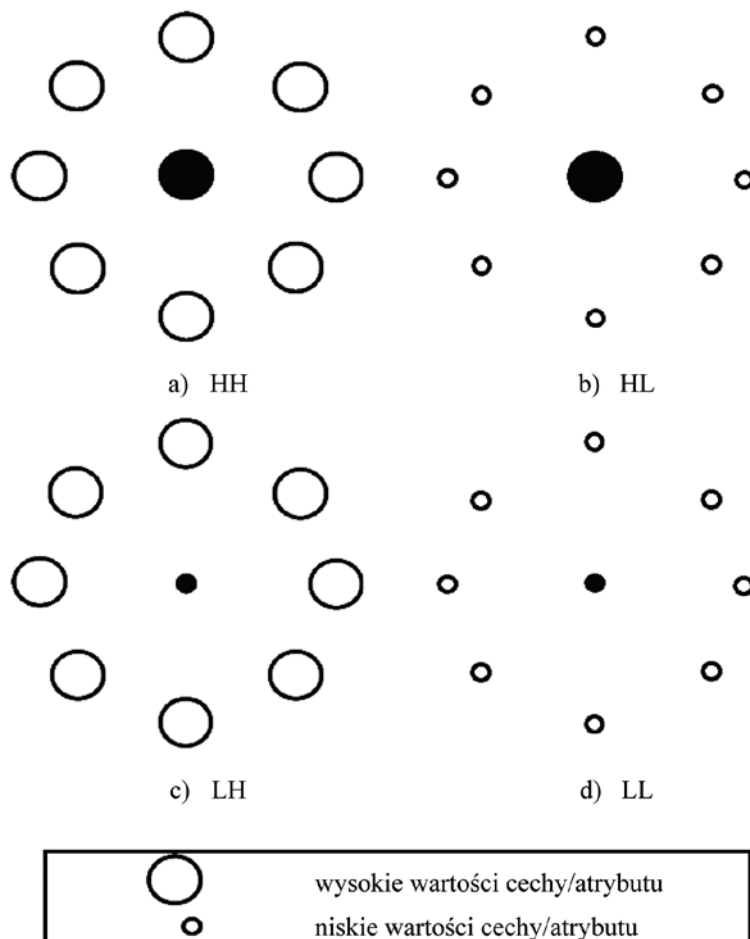
Po obliczeniu statystyk globalnych przystąpiono do obliczeń statystyki lokalnej autokorelacji przestrzennej – lokalnej statystyki Morana, zaliczanej do tzw. mierników LISA (*Local Indicators of Spatial Association*) – które przebiegają w oparciu o formułę zaproponowaną przez Anselina¹.

$$I_i = \frac{z_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2} \sum_{j=1}^n w_{ij} z_j \quad (3)$$

Oznaczenia symboli jak w równaniu 2.

Wysoka dodatnia wartość współczynnika I Morana sugeruje, że badany obszar skupia wysokie lub niskie wartości cechy. Wśród klastrów przestrzennych wyróżnić można klastry oznaczane jako high-high (wysokie wartości cechy w sąsiedztwie obiektów o wysokiej wartości cechy/atributu rys. 2 a) oraz klastry low-low (niskie wartości w sąsiedztwie niskich wartości rys. 2 d). Nawiązując do terminologii występującej w statystyce Getisa-Orda (opisanej w kolejnym punkcie), klastry low-low określić można jako chłodne punkty, a high-high jako regionalne punkty gorąca (proponycja nomenklatury „cool spots” oraz „regional hotspots” zastosowana została w pracy [17]).

Wysokie ujemne wartości statystyki Morana oznaczają, że w badanej lokalizacji występują wartości wyraźnie odbiegające od tych znajdujących się w otoczeniu. Przestrzenne odchylenia występują jako high-low (wysoka wartość w sąsiedztwie niskich rys. 2 b) oraz low-high (niska wartość w sąsiedztwie wysokich rys. 2 c).



Rys. 2. Rodzaje skupień a) i d) klastry przestrzenne b) i c) przestrzenne odchylenia (jednostka odstająca [3], rozproszenia [7], obserwacje nietypowe [4], ang. outliers), a) i b) hot spots c) i d) cool spots (w oparciu o [17])

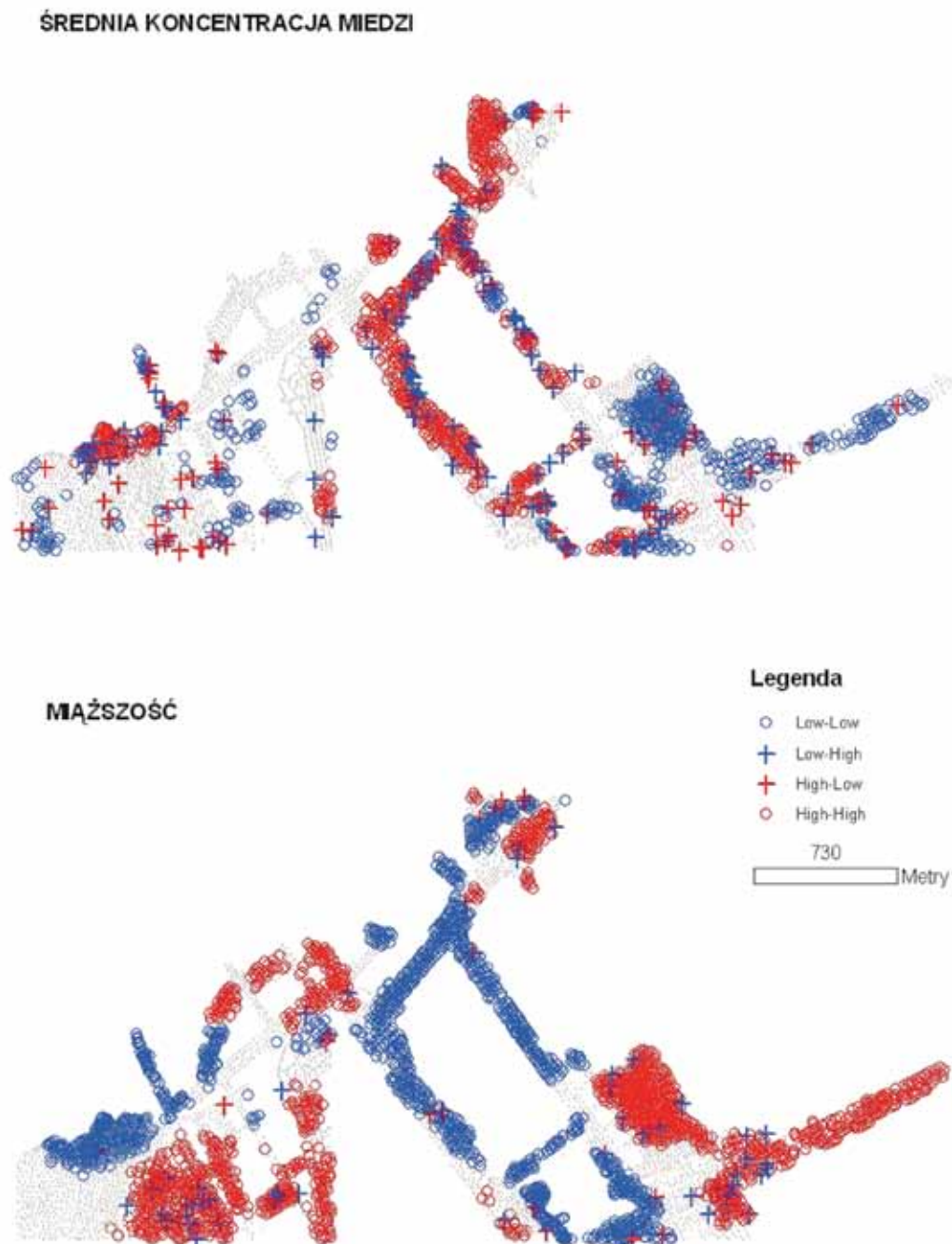
Fig. 2. Types of cluster a) and d) spatial clusters b) and c) spatial variation (an outlier [3], dispersion [7], outliers [4]) a) and b) hot spots, c) and d) cool spots (based on [17])

¹ Local Indicators of Spatial Association – LISA, Geographical Analysis, nr 27(2) - Informacja za [15] Local Indicators of Spatial Association – LISA, Geographical Analysis, nr 27(2) - Informacja za [15]

Patrząc przez pryzmat poszukiwania związku pomiędzy dwiema cechami, a mianowicie miąższością łupka a koncentracją miedzi, obserwowano czy istnieją zależności w lokalizacji klastrow oraz odchylen przestrzennych. W przypadku korelacji ujemnej oczekiwać należałoby występowania w tej samej lokalizacji skupień wysokich wartości jednego parametru i niskich drugiego. Po przeprowadzeniu analizy przy użyciu globalnej statystyki Morana wiadomo, że taka zależność może wystąpić ze względu na istnienie autokorelacji w przypadku każdego z parametrów. Nie wiadomo jednak jak silna będzie to relacja. Uszczegółowieniu analiz posłużyły statystyki lokalne, które przedstawiają się następująco (rys. 3).

Pierwsze spostrzeżenie dotyczy stopnia pokrycia obszaru przez miejsca określone jako klastry i przestrzenne odchylenia. Ponieważ w przypadku miąższości autokorelacja globalna jest silniejsza, to naturalną konsekwencją jest pokrycie badanego obszaru w większym stopniu przez miejsca wykazujące autokorelację, identyfikowane jako ciepłe lub chłodne. Porównując mniejsze fragmenty zbioru danych przestrzennych (rys. 4) zauważono, że:

- w kwadracie A - przypadku 1 - występowaniu klastrow high-high, towarzyszą autokorelacje typu low-high, natomiast w przypadku 2 w tej samej lokalizacji dominują klastry low-low (cool spots), odchylenia występują sporadycznie



Rys. 3. Lokalna analiza I Morana wykonana dla dwóch parametrów: miąższości oraz średniej koncentracji miedzi w warstwie łupkowej [10]

Fig. 3. Local Moran's I analysis performed for two parameters: the thickness and the average copper concentration in the layer of shale [10]

- w kwadracie B – przypadek 1 – lokalizacja klastrów low-low odpowiada częściowo klastrów high-high w przypadku 2, jednocześnie przestrzenne odchylenia high-low odpowiadają (w przybliżeniu) rozproszeniom low-high.

3.1.2. Hot Spot

Analiza hot spot (statystyka Getis-Ord G_i^*) szczegółowo opisana w pracy Getisa i Orda [2] pozwala zidentyfikować dwa rodzaje skupień: o wysokich (hot spots – gorące punkty) lub niskich (cold spots – zimne punkty) wartościach badanej zmiennej.

Statystyka Getisa-Orda wyrażona jest dwoma wzorami [2, 15]

$$G_i(d) = \frac{\sum_{j^i}^n w_{ij}(d)x_j}{\sum_{j^i}^n x_j} \quad (4)$$

$$G_i^*(d) = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ij}(d)x_j}{\sum_{j=1}^n x_j} \quad (5)$$

gdzie w_{ij} jest symetryczną 1/0 (1-lokalizacja w okręgu 0-lokalizacja poza okręgiem o promieniu d) macierzą wag przestrzennych (Anselin 1988, cytowany w: [5]). Różnice w przytoczonych wzorach polegają na uwzględnianiu (w przypadku statystyki G_i^*) lub nie, wartości x_i obserwacji w i -tej lokalizacji w ocenie skupień podobnych wartości.

Wykonanie analiz poprzedzono dobraniem krytycznej odległości. Wartość krytycznej odległości (maksymalnego dystansu) przy spełnionym warunku posiadania sąsiadów przez każdy punkt z analizowanego zbioru wyniosła 70 m.

Wyniki autokorelacji lokalnej hot spot przedstawiono na rysunku (rys 5).

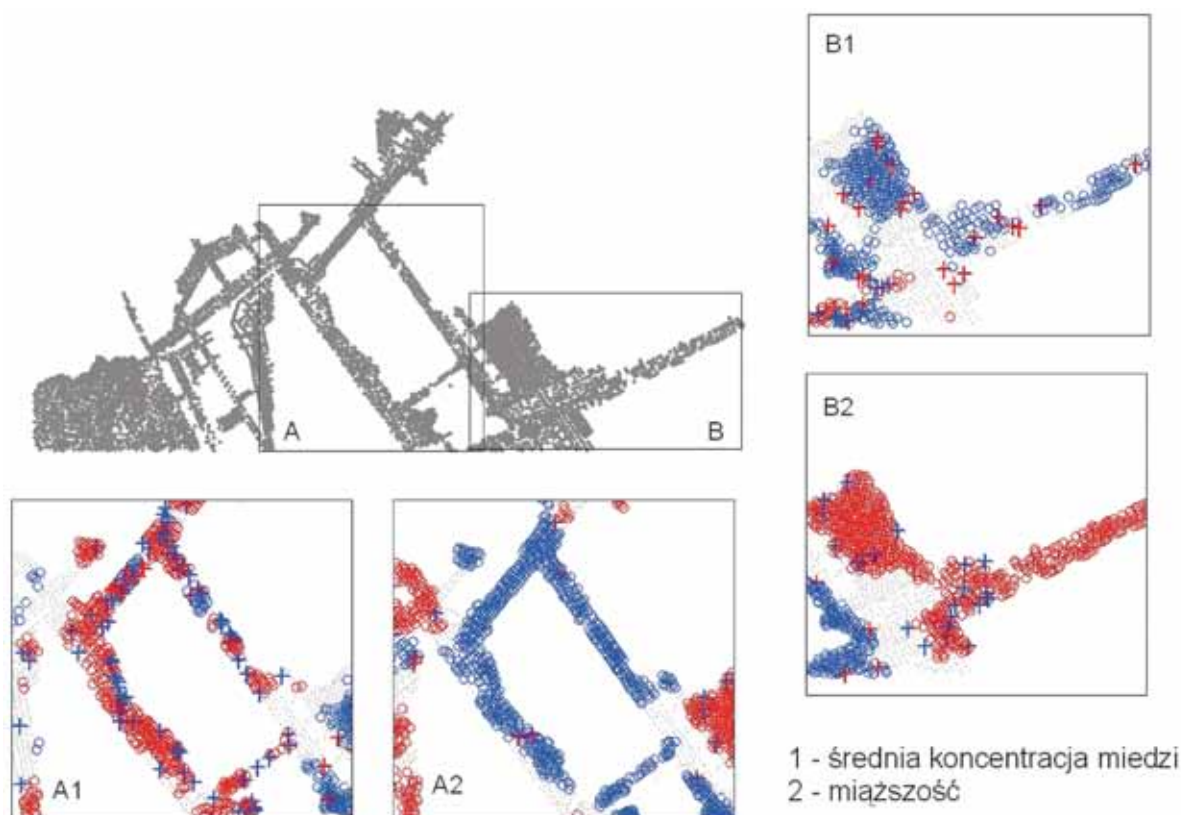
Statystyka *hot spot* pozwala na identyfikację skupień o wysokich (kolor czerwony na rysunku) oraz niskich (kolor niebieski) wartościach badanego parametru. Jeżeli przyjmie się założenie, że istnieje ujemna korelacja między miąższością a średnią koncentracją miedzi, to należy przypuszczać, że wysokie wartości miąższości łupka będą skojarzone z niskimi wartościami koncentracji miedzi w tej warstwie i odwrotnie.

Na rysunku 6 widać, że w analizowanych obszarach złożowych (A i B), w miejscach występowania gorących punktów dla średniej koncentracji miedzi, wartości dla miąższości grupują się w skupienia określane mianem zimnych punktów. Istnieją również miejsca, w których dla obu atrybutów skupienia przyjmują niskie wartości statystyki G_i^* . Jest to spowodowane brakiem warstwy łupkowej w tej lokalizacji.

3.2. Korelacja pomiędzy miąższością łupka a koncentracją w nim miedzi - podsumowanie

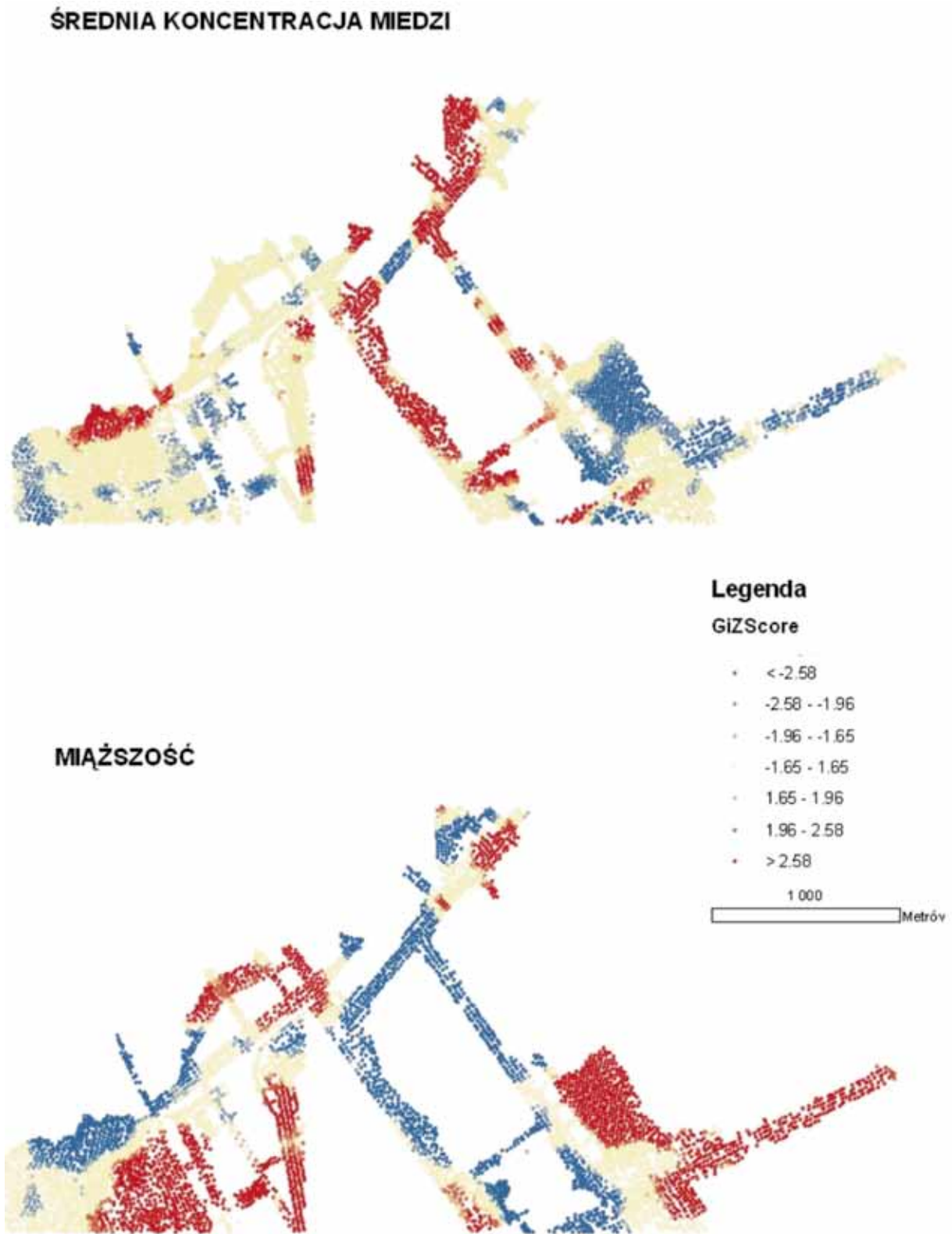
Mając na celu sprecyzowanie obserwacji dotyczących lokalizacji klastrów, gdzie wysoka wartość miąższości łupka odpowiada niskiej wartości średniej koncentracji miedzi w warstwie i odwrotnie, dokonano selekcji. Reguły selekcji ustalono następująco:

- wyberz punkty, dla których wartość G_z dla miąższości jest większa od 2 i jednocześnie wartość ta dla średniej koncentracji miedzi jest mniejsza od -2, jak również punkty, dla których G_z dla miąższości jest mniejsze od -2 i jednocześnie większe od 2 dla średniej koncentracji Cu (analiza hot-spot)
- wyberz punkty, w których dla miąższości łupka stwierdzono istnienie klastrów high-high (HH) i jednocześnie klastrów low-low (LL) dla średniej koncentracji miedzi



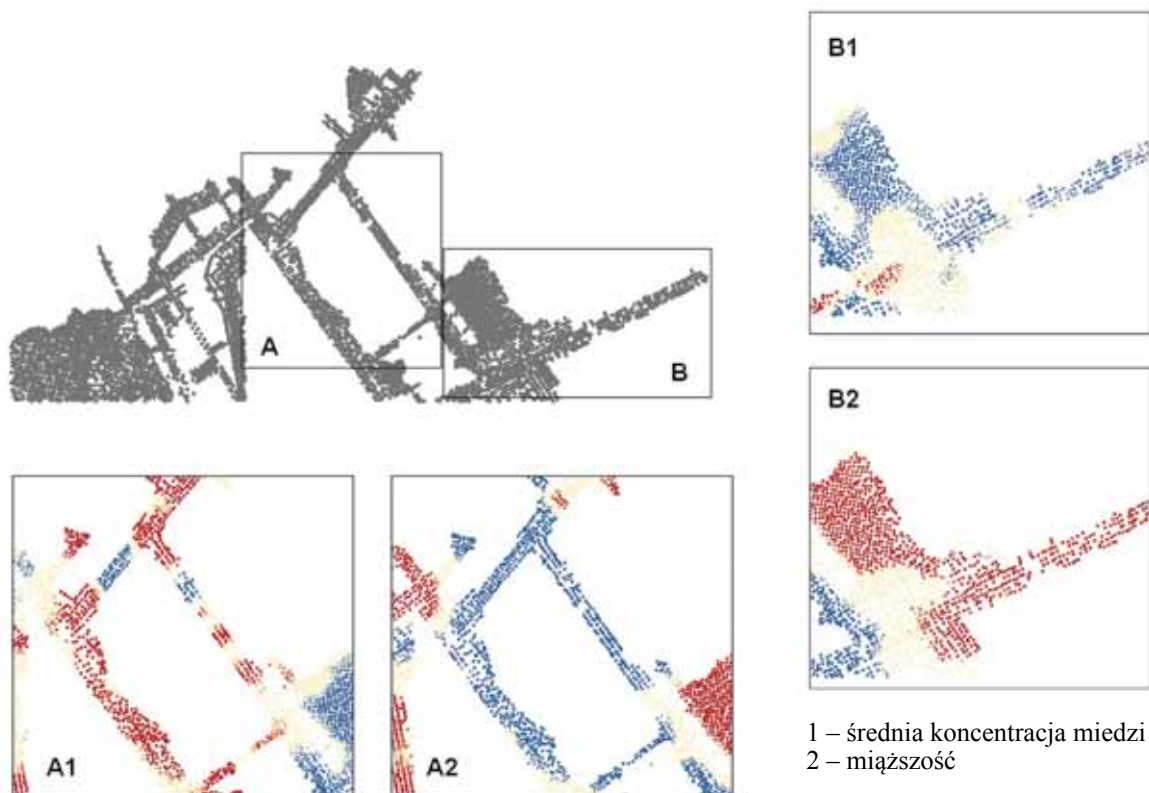
Rys. 4. Wizualizacja klastrów i przestrzennych rozprożeń dla wybranych fragmentów zbioru danych [10]

Fig. 4. Visualization of clusters and outliers for selected parts of the data set [10]



Rys. 5. Analiza G_i^* (hot spot) dla dwóch zmiennych: średnia koncentracja miedzi oraz miąższość łupka w złożu miedzi [10]

Fig. 5. G_i^* analysis (hot spot) for two variables: the average copper concentration and thickness of the shale in the bed of copper [10]



Rys. 6. Analiza G_i^* - wybrane fragmenty analizowanego obszaru [10]
 Fig. 6. G_i^* analysis - selected parts of the study area [10]

oraz punkty, gdy wartości miąższości grupują się w klastry low-low, a średniej koncentracji miedzi w klastry high-high (lokalna analiza Morana)

- c) wybierz punkty, którym przypisano istnienie przestrzennych odchyłeń (zróżnicowań) o wartościach high-low (HL) dla miąższości i jednocześnie low-high (LH) dla średniej koncentracji Cu oraz high-low dla średniej koncentracji i low-high dla miąższości łupka.

Wyniki selekcji, według powyższych reguł, przedstawia schemat lokalizacji punktów oznaczony jako A na rys. 7. Stwierdzono występowanie punktów spełniających warunek „a” w liczbie 1720, warunek „b” w liczbie 909, warunek „c” w liczbie 4 (ogółem punktów poddanych analizom było 5621). Na podstawie pierwszej analizy stwierdzono, że ok. 30% punktów o pomierzonych wartościach parametrów i o zdefiniowanej lokalizacji XY wykazuje zależność wskazującą na istnienie korelacji pomiędzy miąższością a średnią koncentracją miedzi.

Jedynie w przypadku, gdy większość punktów spełniałaby wymienioną zależność można jednoznacznie stwierdzić, że istnieje korelacja pomiędzy dwoma parametrami na analizowanym obszarze. W omawianym przypadku konieczna jest ocena dodatniej korelacji (wraz ze wzrostem miąższości rośnie średnia koncentracja miedzi). W tym celu przeprowadzono selekcję analogiczną do poprzedniej, przy czym z wysokimi wartościami jednego parametru współwystępować musiały wysokie wartości drugiego, a z niskimi niskie wartości. Jej wyniki ilustruje rys. 7 B.

Stwierdzono występowanie punktów spełniających warunki:

- hot-hot/cold-cold – 378 punktów
- HH-HH/LL-LL – 189 punktów
- HL-HL/LH-LH nie stwierdzono.

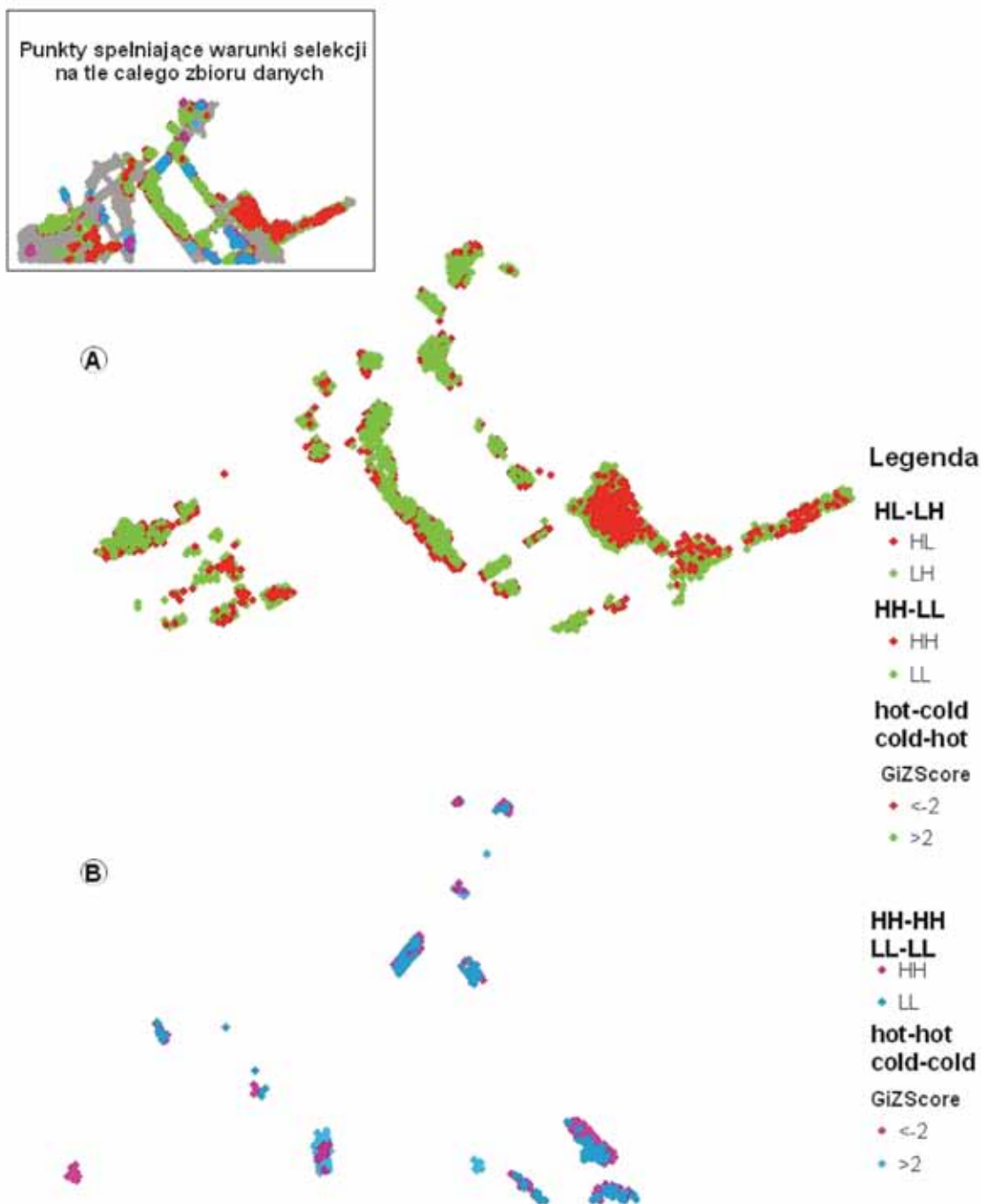
Liczba punktów świadczących o występowaniu korelacji ujemnej pomiędzy analizowanymi parametrami jest ponad 4,5 razy większa od liczby punktów identyfikujących korelacje dodatnią w przypadku analiz hot spot, a 4,8 razy większa w przypadku analizy Morana.

4. Podsumowanie

Po przeprowadzeniu analiz przestrzennych i ocenie wyników statystyk globalnych w kontekście budowy geologicznej złoża LGOM stwierdzono, że:

- Wysoka wartość współczynnika I Morana w przypadku miąższości warstwy łupkowej (0,75 dla odległości 30 m, co świadczy o autokorelacji) jest spowodowana stopniowymi zmianami wartości tego parametru (następują one w sposób ciągły), wpływa na to wydmowa budowa niżej położonych piaskowców.
- Współczynnik I Morana dla średniej koncentracji miedzi wskazuje na istnienie skupisk wartości parametru. Niższa wartość statystyki (w porównaniu ze statystykami dla miąższości warstwy) sugeruje, iż parametr podlega częstszym zmianom, wpłynęło na to zapewne istnienie kilku źródeł mineralizacji złoża oraz nierównomierne rozmieszczenie struktur tektonicznych doprowadzających roztwory z podłoża [1,12]. Na tworzenie się złoża w obecnej postaci składał się szereg procesów (sedymentacja, diagenaza, epigenaza), co również wpłynęło na zróżnicowanie koncentracji miedzi względem lokalizacji (m.in. [11, 12, 13, 14], przegląd poglądów w pracy [9]).

Zidentyfikowanie obszarów przy zastosowaniu statystyk lokalnych (Morana, HOT SPOT) wykazujących ujemną korelację parametrów, można tłumaczyć:



Rys. 7. Wizualizacja rozkładu skupisk (klastrow) o wysokich (hot) i niskich (cold) wartościach [10]
Fig. 7. Visualization of the distribution of clusters with high (hot) and low (cold) values [10]

- występowaniem spękań doprowadzających metale z podłoża w miejscach wysokiej koncentracji miedzi, co związane jest z elewacjami powstałymi wskutek wypiętrzania [12],
- teorią, iż łupek przyjmuje funkcję „ekranu” dla roztworów metalonośnych, tzn. im cieńsza warstwa łupków, tym większa w nich zawartość Cu [6], o słabej przepuszczalności łupku wspomina również Piestrzyński [13] przy omawianiu modelu genetycznego złoża rud miedzi, przypisując warstwie tej właściwości izolujące.

Jednoznaczne ustosunkowanie się do przedstawionych poglądów jest utrudnione ze względu na wielkość analizowanego obszaru. Tylko w przypadku większej liczby danych taka interpretacja byłaby możliwa. Obszary, gdzie ujemna korelacja

analizowanych parametrów nie została zaobserwowana, jak również te, w obrębie których stwierdzono istnienie zależności odwrotnej skłaniają do podjęcia dalszych badań.

Literatura

1. Bogacz W.: Metalliferous deposits: Tectogenesis and mineralisation control, w: Mineral Deposits at the Beginning of the 21st Century: Proceedings of the Joint 6th Biennial SGA-SEG Meeting, red. A. Piestrzyński i in., Krakow, 26-29 August 2001, 7-13.
2. Getis A., Ord J. K.: The analysis of spatial association by use of distance statistics, „Geographical Analysis” 1992, Vol. 24, No. 3.

3. *Janc K.*: Zjawisko autokorelacji przestrzennej na przykładzie statystyki I Morana oraz lokalnych wskaźników zależności przestrzennej (LISA) – wybrane zagadnienia metodyczne, w: Komornicki T., Podgórski Z. (red.), Idee i praktyczny uniwersalizm geografii, Dokumentacja Geograficzna, nr 33, IGiPZ PAN, Warszawa, 2006, 76-83.
 4. *Kopczewska K.*: Ekonometria i statystyka przestrzenna z wykorzystaniem programu R CRAN, CeDeWu, Warszawa 2011, s.161.
 5. *Kossowski T.*: Teoretyczne aspekty modelowania przestrzennego w badaniach regionalnych, w: Praktyczne aspekty badań regionalnych -varia, vol. III, pod. red. P. Churskiego, Biuletyn Instytutu Geografii Społeczno - Ekonomicznej i Gospodarki Przestrzennej Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Seria Rozwój Regionalny i Polityka Regionalna nr 12, Bogucki Wydawnictwo Naukowe, Poznań 2010.
 6. *Kotlarczyk J., Nieć M., Namysłowska-Wilczyńska B.*: Model zmienności złoża rud miedzi Lubin-Polkowice i problemy jego genezy, PAN Oddział w Krakowie, Prace Geologiczne 123, Wydawnictwa Geologiczne, Warszawa 1981.
 7. *Longley P.A., Goodchild M.F., Maguire D.J., Rhind W.* (red. nauk. A. Magnuszewski): GIS: teoria i praktyka, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006, s. 519.
 8. *Oszczepalski S.*: Paleogeografia obszaru złożowego monokliny przedsudeckiej, Monografia KGHM Polska Miedź S.A., 1996, str. 126-131.
 9. *Pactwa K.*: Geomorfologiczne i geochemiczne uwarunkowania mineralizacji złoża LGOM, „Przeгляд Górnicy” 2012a, nr 3, s. 158-163.
 10. *Pactwa K.*: Statystyczny opis koncentracji miedzi w złożu w wybranym rejonie LGOM, praca doktorska, Politechnika Wroclawska, Wroclaw 2012b, s.114.
 11. *Piestrzyński A.*, Geneza złoża, w: Monografia KGHM Polska Miedź S.A., 1996.
 12. *Piestrzyński A.*: Historyczny rozwój poglądów na genezę złoża rud miedzi na monoklinie przedsudeckiej – dyskusja, Biuletyn Państwowego Instytutu Geologicznego, 2007a, 423: 69-76.
 13. *Piestrzyński A.*: Geneza złoża, w: Monografia KGHM Polska Miedź S.A., Lubin, 2007b, 228-244.
 14. *Speczik St.*: The Kupferschiefer mineralization of Central Europe: New aspects and major areas of future research, Ore Geology Reviews 9 (1995), 411-426.
 15. *Suchecki B.* (red. naukowa): Ekonometria przestrzenna. Metody i modele analizy danych przestrzennych, Wydawnictwo C.H. BESK, Warszawa 2010, s. 360.
 16. *Wong D. W.S., Lee J.*: Statistical analysis of geographic information with ArcView GIS and ArcGIS, John Wiley & Sons, Inc., 2005.
 17. *Zhang Ch., Luo L., Xu W., Ledwith V.*: Use of local Moran's I and GIS to identify pollution hotspots of Pb in urban soils of Galway, Ireland, „Science of the total environment” 2008, 398, 212-221.
-