

Propozycja prognozowania deformacji powierzchni spowodowanych eksploatacją dwóch ścian w górotworze nienaruszonym

Concept of forecasting surface deformations caused by exploitation of two longwalls in an unmoved rock mass



*Prof. dr hab. inż. Jan Zych**



*Prof. dr hab. inż. Wiesław Piwowski***

Treść: Prowadzona od bardzo dawna eksploatacja górnicza powoduje wyczerpywanie się zasobów, a także oprócz innych skutków, wzrost głębokości eksploatacji. Prowadzone pomiary geodezyjne wskazują na pewne nowe problemy związane z prognozowaniem wpływów eksploatacji górnicznej na powierzchnię. W artykule przeprowadzono analizę wyników pomiaru osiadań pod wpływem eksploatacji kolejno dwóch ścian, na średniej głębokości, w górotworze nienaruszonym. Najpierw została wyeksploatowana pierwsza ściana, a następnie po całkowitym ujawnieniu się jej wpływów na powierzchni, wyeksploatowana została druga ściana. W wyniku tej eksploatacji i prowadzonych pomiarów geodezyjnych na powierzchni udokumentowane zostały trzy statyczne niecki osiadania. Z pomiarów tych wyznaczono dla każdej statycznej niecki parametry teorii. Na podstawie dokonanej analizy pomiarów geodezyjnych przedstawiono wstępnie sposób prognozowania wpływów eksploatacji na większych głębokościach. Aby poprawnie prognozować wpływy eksploatacji na dużych głębokościach należy uzmiennić współczynnik osiadania.

Abstract: Throughout the years, mining exploitation has caused the depletion of resources and, among the others, the increase of mining depth. Surveying indicates certain new problems with the forecasting of influences of mining exploitation in the surface. This paper presents an analysis of measurement results concerning subsidence under the influence of exploitation of two consecutive longwalls, at medium depth, in the unmoved rock mass. The first longwall was being extracted till the complete occurrence of its influences on the surface. Then, the second longwall was extracted. As the results of the exploitation and surveying, three static subsiding troughs were recorded. The measurements allowed to indicated the parameters of theory for each of the troughs separately. Basing on the analysis of surveying, a method of forecasting the influences of exploitation at greater depths was presented. In order to forecast the influences of exploitation at greater depths properly, the coefficient of subsidence should be varied.

Słowa kluczowe:

algorytm, analiza statystyczna, deformacje, estymacja, górotwór, model matematyczny, pomiary, procedura numeryczna

Key words:

algorithm, statistical analysis, deformations, estimation, rock mass, mathematical model, surveying, numerical procedure

1. Wprowadzenie

Jednym z ważnych problemów wymagających aktualnie prowadzenia badań jest prognozowanie wpływów eksploatacji górnicznej prowadzonej na dużych głębokościach. Problem ten pojawił się w związku z systematycznym wzrostem głębokości eksploatacji oraz prowadzonymi pomiarami geodezyjnymi, które dokumentują w wielu przypadkach odmienny od spodziewanego rozkład deformacji na powierzchni.

Pomiary geodezyjne prowadzone nad eksploatacją w pokładzie wybieranym kolejno pojedynczymi ścianami, dokumentują różne wartości osiadania dla każdej ze ścian. Najmniejsze osiadania występują pod wpływem wyeksploatowania ściany pierwszej, następnie drugiej i trzeciej. Osiadania pod wpływem pierwszej ściany są znacznie mniejsze od prognozowanych teoretycznie.

Powstaje zatem pytanie jak prognozować wpływy eksploatacji na większych głębokościach, aby były zgodne z wynikami pomiarów i czy to jest możliwe. Na podstawie pomiarów należy ustalić w jaki sposób przebiega proces osiadania na powierzchni i co wpływa na jego odmienny

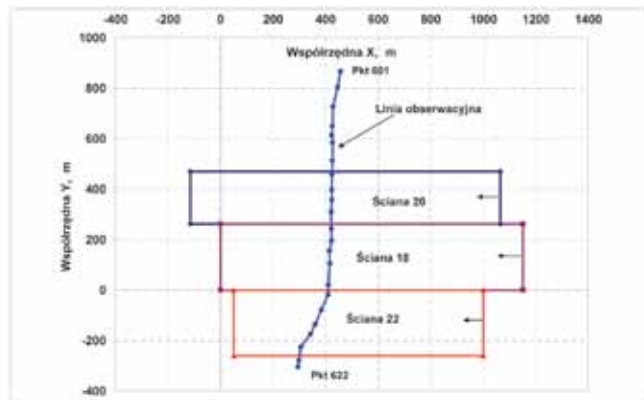
* Politechnika Śląska w Gliwicach, ** Akademia Górniczo Hutnicza w Krakowie

przebieg od dotychczasowych poglądów. Jeden ze sposobów polegał będzie na wyznaczeniu parametrów teorii z pomiarów geodezyjnych dla pojedynczych ścian i sumy ścian, ustaleniu czy parametry są stałe, czy ulegają zmianie i które parametry mają największy wpływ. Następnie należy ustalić tok postępowania dla kolejnych ścian. Spróbujemy zatem odtworzyć proces przebiegu deformacji na podstawie konkretnego przykładu eksploatacji i wyników pomiarów geodezyjnych prowadzonych dla tej eksploatacji.

2. Krótka charakterystyka dokonanej eksploatacji

Jak przebiega proces osiadania powierzchni terenu pod wpływem eksploatacji dwóch ścian można prześledzić na podstawie dokonanej eksploatacji i wykonanych pomiarów geodezyjnych

W analizowanym rejonie prowadzona była eksploatacja w pokładzie 338/2 dwóch ścian z zawalem stropu (rys. 1). Jako pierwsza eksploatowana była ściana 20 w okresie od II kwartału 1996 r. do I kwartału 1997 r. Głębokość eksploatacji wynosiła średnio 500 m.



Rys. 1. Schemat dokonanej eksploatacji w pokładzie 338/2 w przyjętym układzie współrzędnych oraz położenie linii obserwacyjnej

Fig. 1. Scheme of exploitation in seam no. 338/2 in the assumed coordinate system and the location of sight line

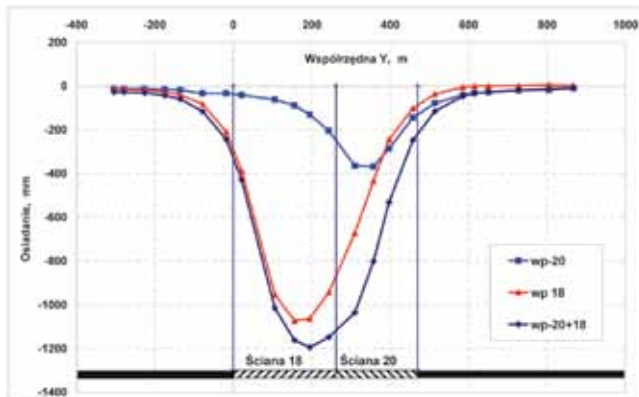
Wysokość ściany wynosiła średnio 1,95 m a jej długość wynosiła 208 m. Eksploatacja ściany 18 prowadzona była w okresie od II kwartału 1997 r. do I kwartału 1998 r. Głębokość eksploatacji wynosiła średnio 520 m, a wysokość ściany wynosiła średnio 1,95 m. Długość ściany wynosiła 262 m.

3. Wyniki pomiarów geodezyjnych

Obserwacje geodezyjne prowadzone były na linii obserwacyjnej, przebiegającej prawie prostopadle do krawędzi ścian 20 i 18, zlokalizowanej jak na rysunku 1. Pierwszy pomiar na linii wykonano w lipcu 1996 r. przed rozpoczęciem eksploatacji, w górotworze nie naruszonym wcześniejszą eksploatacją. Do listopada 1998 r. wykonano 28 cykli pomiarowych obejmujących całość wpływów dokonanej eksploatacji ścianami 20 i 18.

Przeprowadzone pomiary nad eksploatacją ścian 20 i 18 pozwoliły na udokumentowanie przebiegu osiadania nad tą eksploatacją oraz wyodrębnienie trzech statycznych niecek osiadania, a mianowicie: pod wpływem wyeksploatowania

ściany 20 jako pierwszej, pod wpływem wyeksploatowania ściany 18 jako drugiej, pod wpływem wyeksploatowania ściany 20 i 18, Niecki te przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Niecki statyczne pod wpływem eksploatacji ścian 20 i 18 otrzymane z pomiarów

Fig. 2. Static troughs under influence of longwalls 20 and 18 obtained from measurements

4. Wyznaczenie parametrów teorii

Aby sprawdzić czy teoretycznie możemy odtworzyć proces osiadania powierzchni otrzymany z pomiarów geodezyjnych, prowadzonych nad eksploatowanymi ścianami 20 i 18 na większych głębokościach, konieczne jest wyznaczenie parametrów teorii.

W dalszej części stosowana będzie teoria J. Zycha [1] i wyznaczone zostaną parametry tej teorii.

Wzór na osiadanie dla dowolnego punktu A w układzie x, y ma postać:

$$w(x,y) = -ag \left\{ f(p,.) - A_1 \left[\left(\frac{\partial f(p,.)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(p,.)}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (1)$$

gdzie: $f(p,.)$ oznacza funkcję osiadania obliczaną z wzoru

$$f(p,.) = \frac{1}{r_w^2} \iint_p \exp \left[\frac{-\pi(p-x)^2 + (s-y)^2}{r_w^2} \right] dp ds \quad (2)$$

a – współczynnik osiadania,
 g – grubość pokładu,
 A_1 – parametr asymetrii wpływów
 r_w – parametr zasięgu wpływów głównych dla ruchów pionowych.

Parametry teorii można wyznaczyć niezależnie. z każdej z powyżej przedstawionych niecek osiadania.

Zacznijmy jednak wyznaczanie parametrów teorii od niecki sumarycznej otrzymanej z pomiarów pod wpływem wyeksploatowania ścian 20+18. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabelicy 1. W tabelicy tej przedstawiono współrzędne punktów linii obserwacyjnej (X,Y), osiadania otrzymane z pomiarów i obliczone teoretycznie, przy wyznaczonych parametrach.

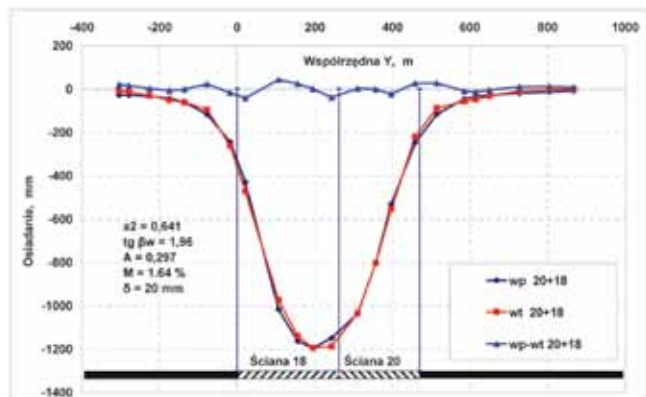
Graficzną interpretację wyników obliczeń przedstawiono na rysunku 3. Na rysunku tym przyjęto następujące oznaczenia:

- wp 20+18 – oznacza nieckę otrzymaną z pomiarów pod wpływem wybrania obu ścian,
- wt 20+18 – oznacza nieckę obliczoną teoretycznie według teorii J. Zycha przy wyznaczonych parametrach podanych na rysunku 3,
- wp-wt 20+18 – oznacza różnicę pomiędzy niecką otrzymaną z pomiarów a obliczoną teoretycznie,

Tablica 1. Wyniki obliczeń
Table 1. Results of calculations

Nr pkt	Współrzędne [m]		Osiadanie [mm]		
	X	Y	wp 20+18	wt 20+18	wp-wt 20+18
601	456.4	866.7	2	0	-2
602	445.7	804.5	-3	-1	2
603	428.2	726.8	-9	-7	1
604	425.8	650.2	-18	-30	-12
605	423.0	614.6	-24	-44	-20
606	426.2	585.6	-36	-52	-16
607	425.4	514.2	-106	-78	28
608	424.4	458.2	-238	-207	31
609	423.4	396.9	-522	-544	-22
419	422.9	357.1	-792	-797	-5
610	421.2	310.3	-1027	-1026	1
611	421.3	243.6	-1139	-1174	-35
612	422.4	195.3	-1185	-1180	5
521	414.3	156.1	-1153	-1128	25
613	416.3	106.4	-1006	-967	39
615	410.5	21.2	-420	-462	-42
616	409.4	-17.9	-234	-247	-13
617	383.9	-77.9	-107	-84	23
618	360.4	-135.2	-50	-56	-6
619	342.2	-174.5	-33	-47	-13
620	305.5	-225.9	-22	-27	-5
621	298.4	-278.8	-18	-11	7
622	295.1	-303.9	-18	-6	12
Parametry					
a	A	tg β _w	δ [mm]	M [%]	dy [m]
0.630	0.305	2.00	20.1	1.6	-20

- a_2 – oznacza współczynnik osiadania pod wpływem wyeksploatowania ścian 20+18,
 - $tg \beta_w$ – parametr rozproszenia wpływ głównych dla ruchów pionowych,
 - A – współczynnik określający stopień asymetrii wpływów,
 - M – błąd procentowy teoretycznej niecki osiadania,
 - δ – średni błąd kwadratowy,
- Uzyskane bardzo małe wartości błędów procentowych i odchylenia kwadratowego świadczą o bardzo dobrym dopasowaniu niecki teoretycznej do niecki otrzymanej z pomiarów. Jednak otrzymany współczynnik osiadania $a_2 = 0,641$ jest za mały jak dla zawału.



Rys. 3. Niecki osiadania otrzymane z pomiarów i obliczone teoretycznie według teorii J. Zycha pod wpływem wyeksploatowania ścian 20+18

Fig. 3. Subsiding troughs obtained from measurements and calculated theoretically according to the theory of J. Zych under the influence of extraction of longwalls 20+18

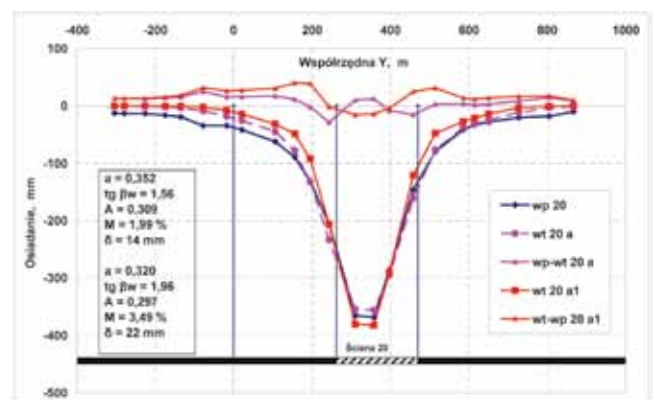
Wyznamy teraz parametry z niecki osiadania otrzymanej z pomiarów, pod wpływem eksploatacji ściany 20. Dla stwierdzenia czy i jak zmieniają się parametry rozpatrzono dwa warianty wyznaczenia parametrów.

W wariantcie 1 wyznaczono równocześnie wszystkie trzy parametry teorii J. Zycha a , $tg \beta_w$ i A . W wariantcie 2 wyznaczono jedynie współczynnik osiadania a_1 , przy $tg \beta_w$ i A przyjętych z wyznaczonych dla ściany 20+18..

Na rysunku 4 mamy przedstawione wyznaczone parametry oraz nieckę osiadania otrzymaną z pomiarów i obliczone teoretycznie niecki osiadania dla obu wariantów, przy wyznaczonych parametrach dla ściany 20. Poszczególne oznaczenia na tym rysunku oznaczają:

- wp 20 – niecka osiadania otrzymana z pomiarów pod wpływem eksploatacji ściany 20,
- wt 20 a – niecka osiadania obliczona teoretycznie według teorii J. Zycha przy wyznaczonych optymalnych parametrach: a , $tg \beta_w$, A dla ściany 20.
- wp – wt 20 a – różnica osiadań pomiędzy niecką otrzymaną z pomiarów a niecką obliczoną teoretycznie przy optymalnych parametrach,
- wt 20 a1 – niecka osiadania obliczona teoretycznie według teorii J. Zycha przy parametrach wyznaczonych dla ściany 20+18, za wyjątkiem współczynnika a_1 , który został wyznaczony z niecki dla ściany 20,
- wp – wt 20 a1 – różnica osiadań pomiędzy niecką otrzymaną z pomiarów a niecką obliczoną teoretycznie przy wyznaczonym współczynniku osiadania a_1 i przyjętych pozostałych parametrach.

Wyznaczone z wariantu 1 dwa z trzech parametrów nie odbiegają wiele od wartości wyznaczonych dla ściany 20+18, za wyjątkiem współczynnika osiadania a dla zawału, który wyniósł zaledwie $a = 0,352$ i różni znacznie od wartości przyjmowanych dotychczas dla eksploatacji z zawałem stropu.



Rys. 4. Niecki osiadania otrzymane z pomiarów oraz obliczone teoretycznie przy wyznaczonych parametrach teorii J. Zycha dla ściany 20

Fig. 4. Subsiding troughs obtained from measurements and calculated theoretically by the assumed parameters of the theory of J. Zych for longwall 20

Otrzymane z wariantu 2 parametry odbiegają niewiele od wartości wyznaczonych dla wariantu 1. Wyznaczony współczynnik a_1 dla zawału, wyniósł $a_1 = 0,320$.

Z powyższego wynika, że do dalszej analizy możemy przyjąć parametry dla ściany 20 z obu rozpatrywanych wariantów. Do dalszej analizy przy analizowaniu niecki pod wpływem eksploatacji ściany 18 wybrano wariant 2

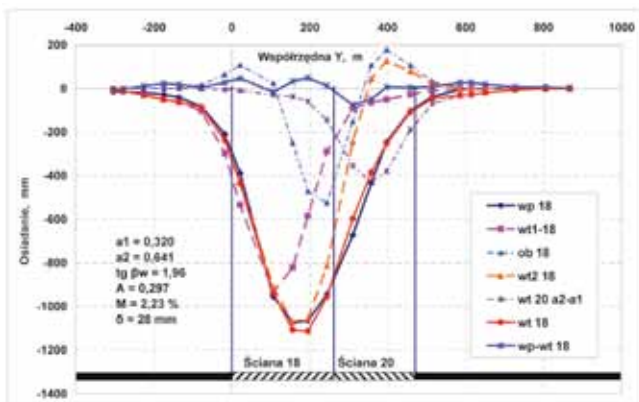
Nieckę osiadania wp 18 pod wpływem wyeksploatowania ściany 18 otrzymano z różnicy (wp 20+18) - (wp 20). Próby wyznaczenia parametrów traktując ścianę 18 jako wybraną

samodzielnie bez uwzględnienia wybranej wcześniej ściany 20, a także z uwzględnieniem tylko obrzeża rejonie wspólnej krawędzi obu ścian, nie powiodły się.

Na rysunku 5 przedstawiono wartości przyjętych parametrów oraz wyniki dopasowania niecki teoretycznej do niecki otrzymanej z pomiarów, pod wpływem wyeksploatowania ściany 18 jako następnej po ścianie 20. Przedstawione też zostały niecki i składowe niecek, z których uzyskano ostateczną nieckę teoretyczną zgodną z wynikami pomiarów. Na rysunku tym poszczególne krzywe oznaczają:

- wp 18 – niecka osiadania otrzymana z pomiarów pod wpływem wyeksploatowania ściany 18,
- wt1 18 – osiadanie obliczone teoretycznie pod wpływem wyeksploatowania samodzielnej ściany 18 (bez obrzeża), przy parametrach wyznaczonych dla ścian 20+18,
- ob. 18 – osiadanie z wyniku oddziaływania obrzeża pomiędzy ścianami 20 i 18,
- wt2 18 – osiadanie będące sumą osiadania (wt1 18) + (ob. 18),
- wt 20 a2-a1 – osiadanie ściany 20 (dosiadanie ściany) pod wpływem wybrania ściany 18,
- wt 18 – osiadanie będące sumą osiadania (wt2 18) + (wt 20 a2-a1),
- wp-wt 18 – różnica pomiędzy niecką otrzymaną z pomiarów, pod wpływem wyeksploatowania ściany 18 jako drugiej po ścianie 20, a niecką teoretyczną możliwą do uzyskania dla ściany 18.

Tylko niecka teoretyczna powstała jako suma niecek i składowych niecek osiadania (obrzeże, dosiadanie ściany 20) odzwierciedla nieckę otrzymaną z pomiarów. Uzyskane bardzo małe wartości błędu procentowego i odchylenia kwadratowego świadczą o bardzo dobrym dopasowaniu niecki teoretycznej do niecki otrzymanej z pomiarów. Jednak otrzymany współczynnik osiadania $a2 = 0,641$ jest za mały jak dla zawалу. Wielkość tego współczynnika osiadania wzrosnąć do wartości przyjmowanej dla zawalu po wyeksploatowaniu ściany trzeciej



Rys. 5. Niecki osiadania otrzymane z pomiarów oraz obliczone teoretycznie przy wyznaczonych parametrach teorii J. Zycha dla ściany 18.

Fig. 5. Subsiding troughs obtained from measurements and calculated theoretically by the assumed parameters of the theory of J. Zych for longwall 18

5. Wnioskowanie statystyczne

Przyjęto, że zbiór odchyłek: różnice pomiędzy wynikami pomiaru i wynikami modelowania – to zmienna losowa (uproszczenie). Niech $X = W_{pom} - W_{teoret}$, wówczas interpretacja zmiennej losowej X jest następująca:

P_X – rozkład z. losowej X na R^k

$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$; $B \in B(R^k)$ - zbiór borelowski
 $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \rightarrow R^k$ zmienne losowe
 $P^x = P_X \forall x = 1, 2, \dots, n$
 $\exists \omega \in \Omega : X_i(\omega) = X_i(\omega) \leftarrow$ model
 Ω - zbiór zdarzeń elementarnych
 Problem dotyczy oszacowania P_X

Wyróżniamy podzbiór:

$P_0 \subset P$ oraz czy $P_X \subset P_1$

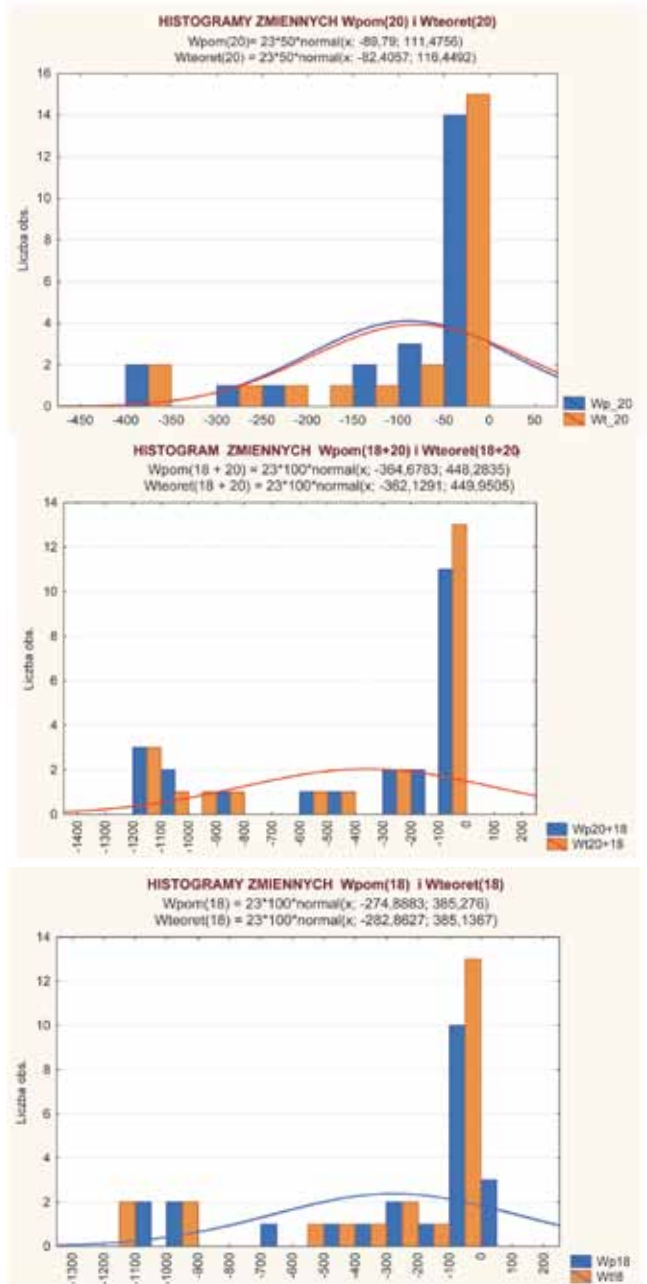
$\Theta = (0 \infty)$

P - zbiór wszystkich rozkładów $\in R$ } wnioskowanie nieparametryczne

Zmienne $W_{pom}(\cdot)$ oraz $W_{teor}(\cdot)$

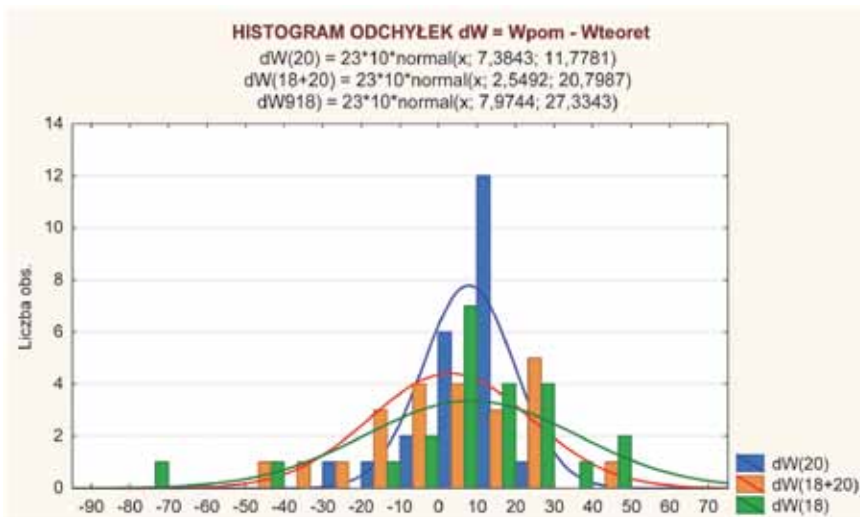
Histogramy pokazano na rys. 6, 7

Macierz korelacji odchyłek tab. 2



Rys. 6. Histogramy rozkładu obniżenia $W_{pom}(\cdot)$; $W_{teor}(\cdot)$ dla trzech skupień oddziaływania ścian górniczych (20; 18). Rozkłady istotnie różne od $N(m_w; \sigma_w)$

Fig. 6. Histograms of subsidence distribution $W_{pom}(\cdot)$; $W_{teor}(\cdot)$ for three concentrations of longwall interactions (20; 18). Distributions significantly different from $N(m_w; \sigma_w)$



Rys. 7. Histogramy odchylek $W_{pom}(\cdot) - W_{teoret}(\cdot)$
 Fig. 7. Histogram of deviations $W_{pom}(\cdot) - W_{teoret}(\cdot)$

Tablica 2. Macierz korelacji odchylek (Wpom – Wteoret)
 Table 2. Matrix of deviation correlations (Wpom-Wteoret)

Zmienne	dW(20)	dW(18+20)	dW(18)
dW(20)	1,000000	0,336490	-0,121133
dW(18+20)	0,336490	1,000000	-0,310166
dW(18)	-0,121133	-0,310166	1,000000

Tablica 3. Test kolejności par Wilcozona ; Wyniki istotne z $p < 0,05$

Table 3. Wilcoxon's signed-rank test; Significant results with $p < 0,05$

Pary zmiennych	N	T	Z	P_{value}
$W_{pom}(20) \leftrightarrow W_{teoret}(20)$	23	47	2.768	0.0056
$W_{pom}(18 \cup 20) \leftrightarrow W_{teoret}(18 \cup 20)$	23	112	0.7907	0.4291
$W_{pom}(18) \leftrightarrow W_{teoret}(18)$	23	66	2.1899	0.0285

Test Wilcozona dla par obserwacji to nieparametryczna formuła dla testu *t-Studenta* dla dwóch równolicznych prób połączonych w pary w celu zbadania, czy nastąpiła jest istotna różnica pomiędzy zmiennymi $W_{pom}(\cdot) \leftrightarrow W_{teoret}(\cdot)$. Do obliczenia p_{value} dla prób o małej liczności (zwykle przyjmuje się $n \leq 20$) korzysta się z tablic statystycznych. Dla dużych prób, używa się przybliżenia rozkładem normalnym

Statystyki

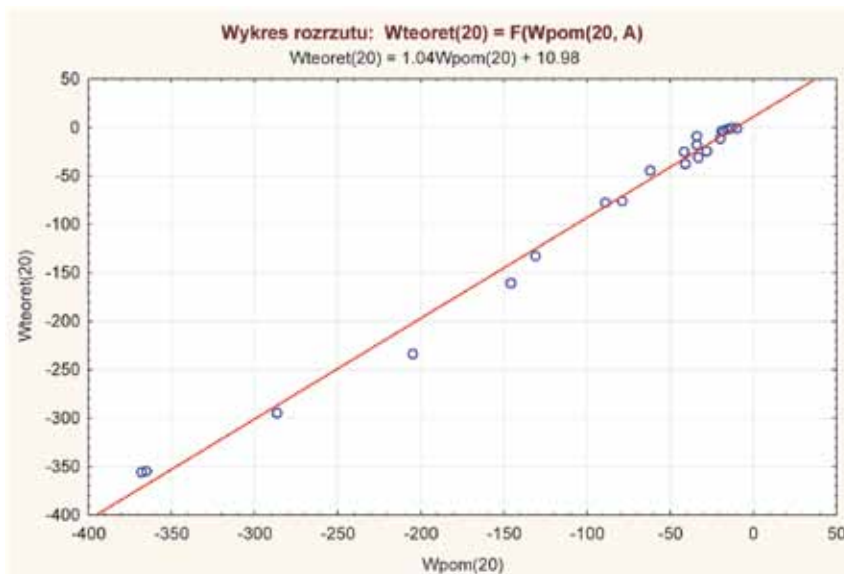
$$Z = \frac{T - ET}{\sqrt{D^2(T)}}$$

gdzie:

$E(T)$ i $D(T)$ są standardowymi symbolami użytymi w celu standaryzacji zmiennej T

$$T = \min(T(+), T(-))$$

Jeżeli licznosc próbek wynosi $n \geq 25$ to Z ma asymptotycznie rozkład normalny, jeśli nie to rozkład stabilizowany. Hipotezy testujące (*one-tailed or two-tailed*) dotyczą równości rozkładów dla obserwacji i oszacowanym p_{value}



Rys. 8. Rozrzut wyników względem prostej regresji $W_{teoret} = \mathfrak{S}(W_{pom}(20); A)$
 Fig. 8. Scatter of results in relation to regression line $W_{teoret} = \mathfrak{S}(W_{pom}(20); A)$

Z tabeli 2 wynika, że korelacje Pearsona zmiennych losowych $\delta W = W_{pom}(\cdot) - W_{teoret}(\cdot)$ są nieistotne.

Z tablicy 3 wynika, że - według miar statystycznych - najlepsze odwzorowanie uzyskujemy dla sytuacji fizycznej (układ ścian górniczych gdy :

$W_{pom}(18 \cup 20) \leftrightarrow W_{teoret}(18 \cup 20)$ – pola (18 \cup 20) stanowią zbiór zwarty

Histogramy odchyłek $W_{pom}(\cdot) - W_{teoret}(\cdot)$ stanowią, że nie są to rozkłady normalne – co stanowi, że zachodzi obciążenie dla wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej losowej $\delta W = W_{pom}(\cdot) - W_{teoret}(\cdot)$

6. Wnioski:

Z przeprowadzonej analizy wyników pomiarów geodezyjnych prowadzonych dla udokumentowania wpływów eksploatacji dwóch ścian na większej głębokości wynikają następujące wnioski:

1. Wykonane pomiary geodezyjne pozwoliły na prześledzenie procesu osiadania terenu pod wpływem wyeksploatowania kolejno dwóch ścian.
2. Z pomiarów wynika zdecydowanie różne maksymalne osiadanie dla każdej ściany. Maksymalne osiadanie pod wpływem wyeksploatowania ściany drugiej było prawie trzy razy większe niż po wyeksploatowaniu ściany pierwszej. Działo się tak dlatego, że pod wpływem wyeksploatowania ściany pierwszej nastąpiło tylko ugięcie warstw. Znaczna część wpływów ujawniła się dopiero podczas eksploatacji ściany drugiej. Poszerzenie frontu o ścianę drugą spowodowało wprawdzie „dosiadanie” nad ścianą pierwszą i osiadanie spowodowane eksploatacją ściany drugiej.
3. Współczynnik osiadania a_1 dla ściany pierwszej należy przyjąć około dwa razy mniejszy niż prognozowany współczynnik po wybraniu obydwu ścian. Aby obliczyć wpływ ściany drugiej należy:
 - przyjąć współczynnik osiadania a_2 jak dla sumy ściany pierwszej i drugiej,
 - uwzględnić wpływ działania obrzeża „ujemnego” na wspólnej krawędzi pomiędzy ścianą pierwszą a drugą,
 - uwzględnić tzw. „dosiadanie”, to jest osiadanie ściany pierwszej przy współczynniku osiadania $a_2 - a_1$.
4. Model procesu przemieszczeń to *odwzorowanie deformowalnej powierzchni terenu górniczego*. Operator F odwzorowania jest liniowy, a $F[f]$ jest ciągle na mocy ciągłości funkcji $f(\cdot)$ i podstawowego twierdzenia rachunku całkowego..
5. Dokonana eksploatacja górnicza (ściany: **20, 18, 22**) generuje następujące preferencje tranzytywne przemieszczeń poszczególnych punktów P_i terenu górniczego:

Punkt P_i : **20 > 18 > 22 < 20**

Zdarzenia oddziaływania różnych ścian eksploatacji (**20, 18, 22**) są quasi-rozłączne i obejmują pełną przestrzeń probabilistyczną

6. Miara zależności pomiędzy zmiennymi losowymi. to odległość pomiędzy łączną gęstością a produktem ich gęstości brzegowych; oszacowano, że $\rightarrow 0$; stąd zmienne losowe są statystycznie niezależne.

W pracy przeprowadzono analizy statystyczne celem oszacowania zależności statystycznych pomiędzy zmiennymi stanowiącymi wyniki pomiaru $W_{pom}(\cdot)$ oraz wyniki modelowania $W_{teoret}(\cdot)$, głównie analizowano zmienne losowe $\delta W = W_{pom}(\cdot) - W_{teoret}(\cdot)$

7. Z przeprowadzonych analiz wynikają następujące spostrzeżenia:
 - zmienne losowe $\delta W = W_{pom}(\cdot) - W_{teoret}(\cdot)$ nie przynależą do rozkładu normalnego $\delta W \neq N(m_{\delta W}, \sigma_{\delta W})$ - co stanowi, że klasyczne momenty statystyczne będą obciążone.
 - wyniki testu Wilcoxona (tab. 2) dla par obserwacji wskazują, że najlepsze odwzorowanie teoretyczne uzyskujemy dla sytuacji fizycznej (układ ścian górniczych) gdy :
 $W_{pom}(18 \cup 20) \leftrightarrow W_{teoret}(18 \cup 20)$ – pola (18 \cup 20) stanowią jeden zbiór zwarty,
 - korelacje Pearsona (tab.1) zmiennych losowych $\delta W = W_{pom}(\cdot) - W_{teoret}(\cdot)$ są nieistotne,
 - rozrzut wyników względem prostej regresji $W_{teoret} = \mathfrak{Z}(W_{pom}(20); A)$ potwierdza spostrzeżenie o nadrzędności korzystania ze zbioru zwartego na etapie modelowania pola przemieszczeń pionowych.

Literatura:

1. *Luszniewicz A, Staby T.*: Statystyka z pakietem komputerowym STATYSTYKA™ PL Teoria i zastosowania. Wydawnictwo C.H. Beck. Warszawa 2001.
2. *Piwowski W.*: O ryzyku wystąpienia szkody górniczej. (About risk of mining damage occurrence), VII Dni Miernictwa Górniczego i Ochrony Terenów Górniczych, Główny Instytut Górnictwa 2005).
3. *Piwowski W.*: A Random Model of a Nonstationary State of Post-Mining Surface Dislocations, Rock Mechanics a Challenge for Society. Balkema Publishers Tokyo 2006.
4. *Zych J.*: Metoda prognozowania wpływów eksploatacji górniczej na powierzchnię terenu uwzględniająca asymetryczny przebieg procesu deformacji. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Górnictwo z. 164 Gliwice 1987. s. 154.
5. *Zych J.*: Teoria nieliniowa prognozowania wpływów eksploatacji górniczej na powierzchnię terenu w świetle wyników obserwacji geodezyjnych. Archives of Mining Sciences. Volume 43. Issue 1. 1998. s. 55÷83.
6. *Zych J.*: The subsidence analysis in time on the grounds of geodetic measurements for “Budryk” coal mine. Materiały konferencyjne 11th International Congress of the International Society for Mine Surveying. Kraków, wrzesień 2000 r. Tom 2. s. 49÷59